Devoir surveillé numéro 1

Exercice 1 *(4 points)*

1. Les nombres complexes z_1 et z_2 sont définis par : $z_1 = 1 - \mathrm{i}$ $\qquad z_2 = 1 + 3\mathrm{i}$

   En détaillant les calculs, écrire les nombres suivants sous forme algébrique :

$$z_1 - \mathrm{i} \times \overline{z_2} \qquad\qquad \frac{z_1}{z_2}$$

2. Résoudre l'équation suivante dans l'ensemble des nombres complexes : $z^2 - 2z + 5 = 0$.

Exercice 2 *(7 points)*

Soit A le point d'affixe 4 dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. On note d la droite d'équation $x = 4$, privée du point A.

À tout point M, différent de A, d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z-4}{4-\bar{z}}$.

1. a) Soit B d'affixe $1 + 3i$. Déterminer l'affixe du point B' associé au point B. Placer ces deux points sur une figure.

   b) Soit x un nombre réel différent de 4. On note R le point d'affixe x. Déterminer l'affixe de R', point associé à R. Placer R'.

   c) Soit y un nombre réel non nul. Soit S le point de d d'affixe $4 + iy$. Déterminer l'affixe de S', point associé à S. Placer S'.

   Dans les questions qui suivent, il est possible de poser $z = x + iy$, mais ce n'est pas une obligation.

2. Démontrer que pour tout complexe $z \neq 4$, $\mid z' \mid = 1$.

   En déduire le lieu où se trouve le point M', et le dessiner sur la figure.

3. Démontrer que pour tout complexe $z \neq 4$, $\dfrac{z'-1}{z-4} \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 *(5 points)*

Un **nombre parfait** est un entier naturel n dont la somme des diviseurs est égale à $2n$.

1. Donner tous les diviseurs de 6. En déduire que 6 est un nombre parfait.
2. Démontrer qu'un nombre premier ne peut pas être parfait.
3. Soit p un nombre premier. Soit $a = 2^4 \times p$.

   a) Écrire tous les diviseurs de a, puis leur somme (en fonction de p).

   b) En déduire la ou les valeurs de p pour que a soit un nombre parfait.

Exercice 4 *(4 points)*

On dispose d'une instruction `premier(p)`, qui renvoie 1 si le nombre entier p est premier, et 0 sinon. Il n'est pas demandé de détails sur cette instruction. Ainsi :

- `premier(3)` renvoie 1 ;
- `premier(6)` renvoie 0.

```
n ⟵ 1
u ⟵ 11
Tant que premier(u) = 1 :
        n ⟵ n+1
        u ⟵ n²−n+11
Fin tant que
```

On se demande si l'algorithme ci-contre permet d'engendrer une suite de nombres premiers dans la variable u.

1. Vérifier que la boucle `Tant que` s'exécute au moins 2 fois.
2. Sans exécuter d'autres itérations de l'algorithme, justifier qu'il se termine, c'est-à-dire que la boucle `Tant que` n'est pas infinie.

Le savant doit ordonner ; on fait la science avec des faits comme une maison avec des pierres ; mais une accumulation de faits n'est pas plus une science qu'un tas de pierres n'est une maison.

Henri Poincaré, La science et l'hypothèse.